

Έκτο Τεστ Απειροστικός Λογισμός 1

Διάρκεια 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

Να απαντήσετε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι αληθείς ή ψευδείς με πλήρη αιτιολόγηση.

- (i) Αν $A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$ τότε συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in A$ είναι παραγωγίσιμη μόνο στο 0 .
- (ii) Αν η f^2 είναι παραγωγίσιμη αν και μόνο αν f παραγωγίσιμη.
- (iii) Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (x-1)^2 g(x), x \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει η $f'(1)$.
- (iv) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια, τότε και η $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή.
- (v) Αν η f' είναι φραγμένη τότε και η f είναι φραγμένη.

Θέμα 2

Να εξετάσετε σε ποια σημεία (αν υπάρχουν) η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

είναι συνεχώς παραγωγίσιμη.

Θέμα 3

- (i) Να αποδείξετε (με τη χρήση του θεωρήματος αντίστροφης συνάρτησης) ότι

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1) \text{ και } (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

- (ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x+3}{5}\right) + 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{4+x}}\right)$$

και να δείξετε ότι η παράγωγός της ισούται με 0 στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της.

Θέμα ανοικτού τύπου (Έξτρα)

Να δώσετε ένα παράδειγμα συνάρτησης η οποία είναι συνεχής μόνο σε δύο σημεία και παραγωγίσιμη μόνο σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!